Microeconomía - 2025

Teoría del Consumidor

Ingeniería Comercial - FACSE - UCM

Abril, 2025

Teoría del Consumidor

Objetivos:

- Analizar la restricción presupuestaria y su rol en la toma de decisiones del consumidor.
- Formular el problema del consumidor como un problema de optimización bajo el enfoque **primal** (maximización de utilidad con restricción presupuestaria).
- Aplicar dos métodos equivalentes para resolver el problema primal: la condición de tangencia y el método de Lagrange.
- Derivar las funciones de **demanda individual** a partir del óptimo del consumidor.

La Conducta de los Consumidores

El estudio de la conducta de los consumidores implica tres etapas:

1. **Las preferencias de los consumidores:** Describe las razones por las que las personas prefieren un bien a otro. *Las preferencias pueden describirse gráfica y algebraicamente*.
2. **Las restricciones presupuestarias:** Las personas tienen un ingreso limitado.
3. **La combinación de las preferencias de los consumidores y las restricciones presupuestarias** se utilizan para determinar las elecciones de los consumidores. A partir de estas se obtienen las curvas de demanda individual y del mercado.

La Restricción Presupuestaria

Restricción Presupuestaria

Indica todas las combinaciones de bienes y servicios con las que la cantidad total del dinero gastado es igual a la renta.

Para el caso de n bienes:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq M$$

* No se puede gastar más que lo que se l

Donde:

p_i es el precio del bien i

x_i es la cantidad consumida del bien i

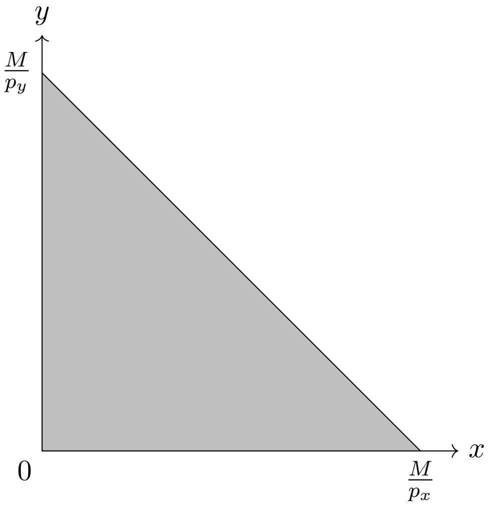
M es el ingreso

Restricción presupuestaria

Suponga que un individuo tiene un ingreso de M dólares para asignarlo entre los bienes x e y. Si p_x es el precio del bien x y p_y es el precio del bien y, el individuo estaría restringido por

$$p_x x + p_y y \leq M$$

Restricción presupuestaria



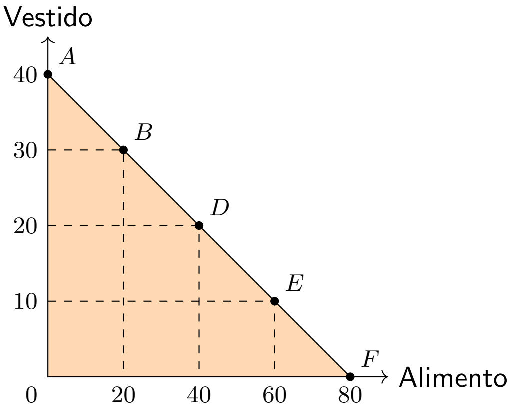
- Pendiente Restricción Presupuestaria: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{p_x}{p_y}$.
- Área sombreada representa combinaciones de x e y que se puede permitir el individuo.
- En el límite externo del triángulo el individuo se gasta todo su ingreso.

Ejemplo Restricción presupuestaria

Combinaciones de Alimento y Vestido que se pueden comprar con 80 USD si $p_A = 1$ y $p_V = 2$

Cesta	Alimentos (A)	Vestido (V)
A	0	40
B	20	30
D	40	20
E	60	10
F	80	0

Ejemplo Restricción presupuestaria



De $M = p_A A + p_V V$

$$V = \frac{M}{p_V} - \frac{p_A}{p_V} A$$

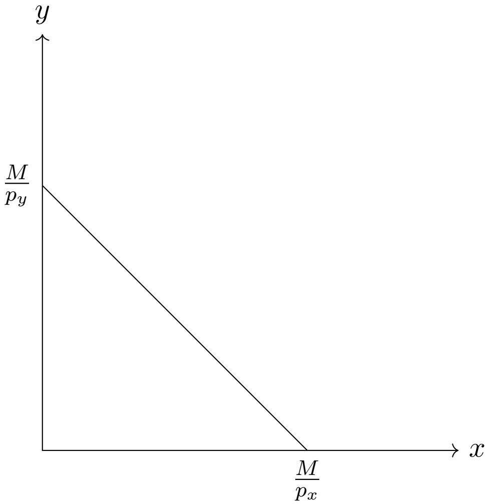
La pendiente de la restricción presupuestaria indica el precio relativo del bien x.

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta V}{\Delta A} = -\frac{p_A}{p_V}$$

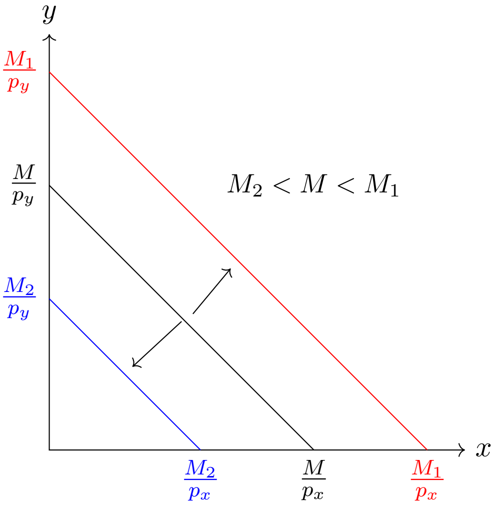
$$-\frac{P_x}{P_y}$$

la tasa a la que el mercado permite intercambiar 1 bien por otro

Variaciones en el nivel de ingreso



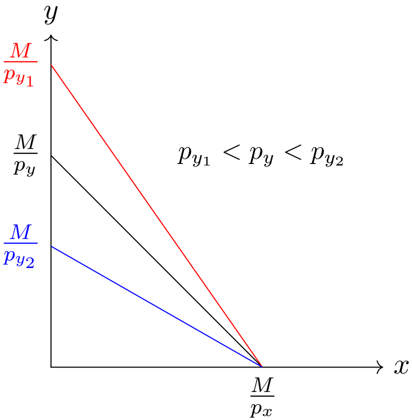
Cambio en el ingreso, precios se mantienen constantes

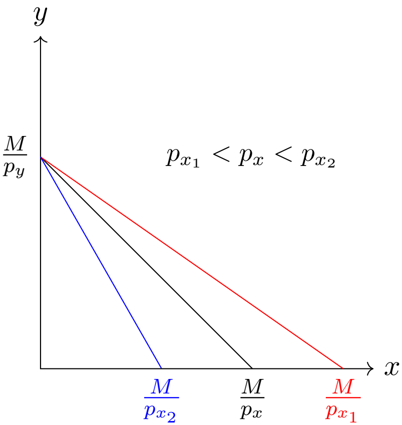


Variaciones en los precios

Cambio en el precio, nivel de ingreso constante

Cambio en p_y





La combinación de las preferencias de los consumidores y las restricciones presupuestarias: El Óptimo del Consumidor

Dos enfoques del problema del consumidor

¿Qué está eligiendo el consumidor y bajo qué condiciones?

Enfoque Primal

- **Pregunta:** *¿Cuál es la canasta que maximiza la utilidad dado un ingreso y precios?*
- **Objetivo:** Maximizar utilidad
- **Restricción:** Restricción presupuestaria
- **Problema:**

$$\max_{x,y} u(x,y) \quad \text{s.a.} \quad p_x x + p_y y \leq I$$

- **Resultado:** Demanda Marshalliana $x^M(p_x, p_y, I),\ y^M(p_x, p_y, I)$

Enfoque Dual

- **Pregunta:** *¿Cuál es el gasto mínimo necesario para alcanzar un nivel de utilidad dado?*
- **Objetivo:** Minimizar gasto
- **Restricción:** Nivel de utilidad dado
- **Problema:**

$$\min_{x,y} p_x x + p_y y \quad \text{s.a.} \quad u(x,y) \geq \bar{u}$$

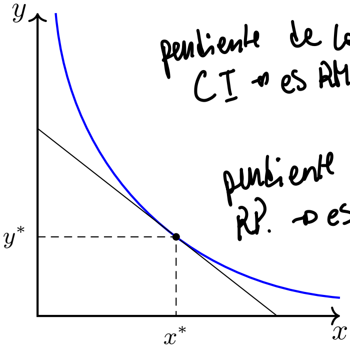
- **Resultado:** Demanda Hicksiana $x^H(p_x, p_y, \bar{u}),\ y^H(p_x, p_y, \bar{u})$

Resumen comparativo

- **Ambos enfoques son equivalentes**, pero abordan preguntas distintas.
- El enfoque primal es útil para **análisis de comportamiento**.
- El enfoque dual es útil para **medición del bienestar** (como la variación compensada o equivalente).

El óptimo del consumidor

Los consumidores eligen una combinación de bienes que maximicen su nivel de utilidad dado el presupuesto con el que cuentan.



pendiente de la CI → es RMS

pendiente de la RP. → es $-\dfrac{P_x}{P_y}$

La cesta maximizadora debe satisfacer dos condiciones:

1. Debe encontrarse en la restricción presupuestaria.
2. Debe suministrar al consumidor la combinación de bienes y servicios por la que muestra una preferencia mayor (maximizar su utilidad)

El óptimo del consumidor

Considerando las pendientes de la curva de indiferencia $(-\Delta y/\Delta x)$ y de la restricción presupuestaria $(-p_x/p_y)$, en el óptimo del consumidor se cumple

$$\text{RMS} = \frac{p_x}{p_y}$$

Como la RMS es igual al cociente entre las utilidades marginales del consumo, se desprende que:

$$\frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

→ condición de óptimo

→ condición tangente

El óptimo del consumidor

De la ecuación anterior obtenemos la ecuación de la maximización de la utilidad.

$$\frac{UMg_x}{p_x} = \frac{UMg_y}{p_y}$$

La utilidad total se maximiza cuando el presupuesto se asigna de tal manera que la utilidad marginal de todos los bienes por unidad monetaria de gasto sea idéntica. A esto se le denomina principio de equimarginalidad[1].

[1] Principio según el cual la utilidad se maximiza cuando un consumidor ha igualado la utilidad marginal de cada dolar gastado en cada bien.

Supuesto de convexidad

1. Asegura cumplimiento de las Condiciones de Primer Orden.
2. Asegura Solución interior.
3. La solución es única.

Análisis Matemático: ¿Qué es un problema de optimización?

Un problema de optimización busca encontrar el valor máximo o mínimo de una función, respetando ciertas condiciones o restricciones.

En nuestro contexto:

- El consumidor quiere maximizar su **utilidad** (satisfacción).
- Pero tiene una restricción: su ingreso es limitado.
- Por eso, su problema es:

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{s.a.} \quad p_x x + p_y y \leq M$$

Este es un ejemplo clásico de **optimización con restricción**, muy común en economía.

Análisis matemático de la optimización

Caso de dos bienes, maximización de la utilidad (problema primal)

El consumidor maximiza su utilidad, sujeta a una restricción presupuestaria.

El problema que resuelven los consumidores puede representarse matemáticamente como:

$$\max_{x,y} U(x,y)$$
$$s.a.\ M = p_x x + p_y y$$

¿Cómo resolver el problema?

Análisis matemático de la optimización

Caso de dos bienes, maximización de la utilidad (problema primal)

Utilizando el Método de Lagrange y construyendo el lagrangeano:

$$\mathscr{L} = U(x, y) + \lambda(M - p_x x - p_y y)$$

Condiciones de primer orden (C.P.O.):

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda p_x = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda p_y = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = M - p_x x - p_y y = 0 \tag{3}$$

El sistema de ecuaciones determina x e y óptimos en función de las variables exógenas (p_x, p_y, M).

Análisis matemático de la optimización

Caso de dos bienes, maximización de la utilidad (problema primal)

De (1) y (2) obtenemos:

$$\lambda = \frac{UMg_x}{p_x} = \frac{UMg_y}{p_y}$$

Interpretación:

- Cada bien adquirido debe ofrecer la misma utilidad marginal por peso gastado. Si no se cumpliera esta condición, un bien podría ofrecer un "mayor disfrute marginal por peso" que otro bien, y los ingresos no estarían asignados de forma óptima.

Ejemplo función de utilidad Cobb–Douglas

Considere una función de utilidad $U(x, y) = xy$, con precios $p_x = 1$, $p_y = 1$ y un ingreso de 100 ($M = 100$). Encuentre la cesta óptima.

$$\mathcal{L} = U(x,y) + \lambda(M - p_x x - p_y y)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = M - p_x x - p_y y$$

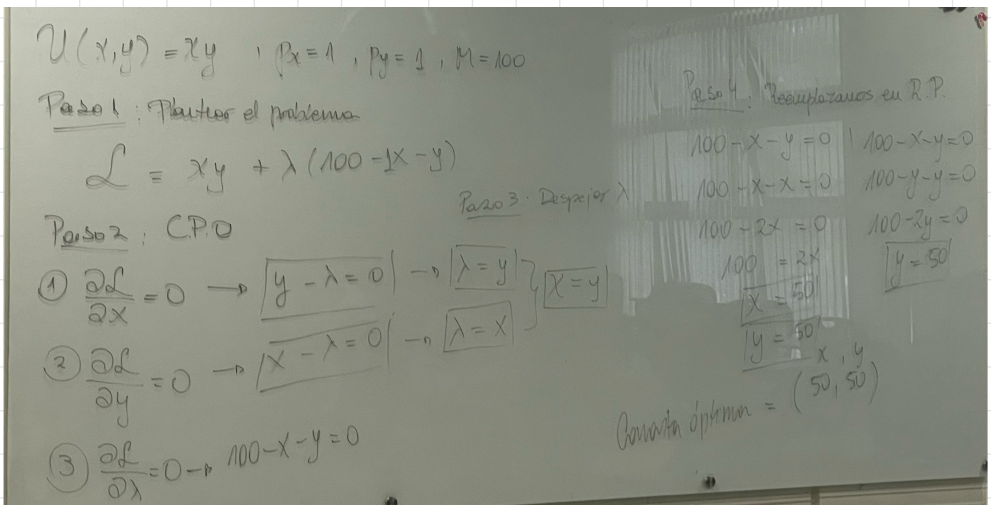
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda p_y$$

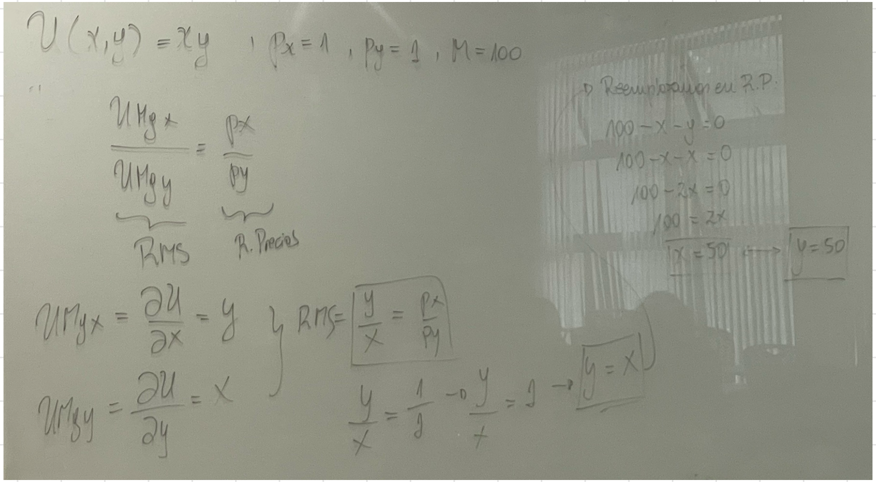
$$\frac{\partial u}{\partial x} = U.Mgx \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = UMgy$$

$$\lambda = \frac{UMg_x}{p_x} = \frac{UMg_y}{p_y}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{px} = \lambda \qquad \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{py} = \lambda \qquad \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{px} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{py}$$



Lagrange



Condicion de optimo

Resolviendo con la condición de tangencia

Para resolver el problema del consumidor sin Lagrange, usamos:

$$\frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{p_x}{p_y} \quad \text{y} \quad p_x x + p_y y = M$$

Ejemplo: $U(x, y) = xy$, $p_x = 1$, $p_y = 1$, $M = 100$

- Derivadas marginales: $UMg_x = y$, $UMg_y = x$
- De la tangencia: $\frac{y}{x} = 1 \Rightarrow y = x$
- Sustituyendo en la restricción: $x + y = 100 \Rightarrow x + x = 100 \Rightarrow x = 50, y = 50$

Resultado: misma cesta óptima que usando Lagrange.

Ejercicio: Obtener la cesta óptima

Considera la función de utilidad $U(x, y) = x^{0,5}y^{0,5}$, con precios $p_x = 2$, $p_y = 1$, e ingreso $M = 60$.

- (1) Utiliza el método de la condición de tangencia para encontrar la cesta (x^*, y^*).
- (2) Verifica el resultado usando el método de Lagrange.

Pista: Deriva la función, encuentra la relación entre bienes, reemplaza en la restricción.

Ejemplo función de utilidad con Elasticidad de Sustitución Constante (ESC)

Considere una función de utilidad $U(x,y) = x + 2y$, con precios $p_x = 1$, $p_y = 1$ y un ingreso de 100 $(M = 100)$. Encuentre las cantidades óptimas $(x^*(p_x, p_y, M),\ y^*(p_x, p_y, M))$.

¿Qué es la demanda individual?

- La **demanda individual** muestra la cantidad óptima que consume un individuo de cada bien, dados sus precios y su ingreso.
- Se obtiene resolviendo el **problema de optimización del consumidor**.
- También se le llama **demanda Marshalliana**:

$$x^M(p_x, p_y, M) \quad \text{y} \quad y^M(p_x, p_y, M)$$

- Depende de: precios relativos y del ingreso del consumidor.

Ejemplo derivación de demandas Marshallianas

Supón que $U(x, y) = x^a y^{1-a}$. Resuelve el problema usando el método de Lagrange:

$$\mathcal{L} = x^a y^{1-a} + \lambda(M - p_x x - p_y y)$$

- Deriva las condiciones de primer orden (FOC).
- Obtén la relación de tangencia.
- Sustituye en la restricción presupuestaria.

Resultado final:

$$x(p_x, p_y, M) = \frac{aM}{p_x}, \quad y(p_x, p_y, M) = \frac{(1-a)M}{p_y}$$

Ejercicio: Derivar funciones de demanda Marshalliana

A partir de $U(x, y) = x^{0,5}y^{0,5}$, encuentra las funciones de demanda Marshalliana:

$$x(p_x, p_y, M) = ? \qquad y(p_x, p_y, M) = ?$$

Pista: Usa el método de Lagrange. Recuerda que el gasto óptimo en cada bien es proporcional a su elasticidad a y $1 - a$.

$$U(x,y) = x^{0,5}\, y^{0,5}$$

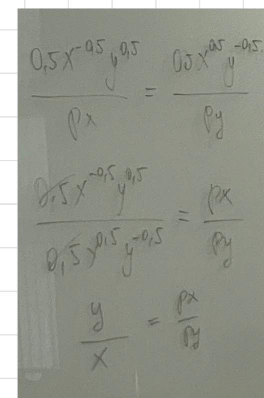
Paso 1: $x^{0,5} y^{0,5} + \lambda(M - p_x x - p_y y)$

Paso 2

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \rightarrow 0{,}5\, x^{-0,5} y^{0,5} - \lambda p_x = 0 \rightarrow 0{,}5\, x^{-0,5} y^{0,5} = \lambda p_x \rightarrow 0{,}5 \left(\frac{y}{x}\right)^{0,5} = \lambda p_x \rightarrow \frac{0{,}5\left(\frac{y}{x}\right)^{0,5}}{p_x} = \lambda \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \rightarrow 0{,}5\, y^{-0,5} x^{0,5} - \lambda p_y = 0 \rightarrow 0{,}5\, y^{-0,5} x^{0,5} = \lambda p_y \rightarrow 0{,}5 \left(\frac{x}{y}\right)^{0,5} = \lambda p_y \rightarrow \frac{0{,}5\left(\frac{x}{y}\right)^{0,5}}{p_y} = \lambda \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \rightarrow M - p_x x - p_y y = 0 \quad (3)$$



(4) $y = \frac{p_x}{p_y} x$

$$U(x,y) = x^{0,5}\, y^{0,5}$$

$$\boxed{y = \frac{p_x}{p_y}\, x} \quad (4)$$

Paso 4: Sustituir (4) en (3)

$$M - p_x X - p_y (y) = 0$$

$$M - p_x X - \cancel{p_y}\, \frac{p_x}{\cancel{p_y}}\, X = 0$$

$$M - p_x X - p_x X = 0$$

$$M - 2p_x X = 0$$

$$\boxed{x^m = \frac{M}{2p_x}}$$

$$y = \frac{p_x}{p_y}\,(X)$$

$$y = \frac{\cancel{p_x}}{p_y}\, \frac{M}{2\cancel{p_x}}$$

$$\boxed{y^m = \frac{M}{2p_y}}$$

Diferencia entre cesta óptima y demanda Marshalliana

Concepto	**Cesta óptima**	**Demanda Marshalliana**
¿Qué es?	Resultado puntual del problema de maximización.	Función que indica la cesta óptima para cada combinación de precios e ingreso.
Forma	Valores específicos: (x^*, y^*).	Funciones: $x^M(p_x, p_y, M)$, $y^M(p_x, p_y, M)$.
Depende de	Un conjunto específico de precios e ingreso.	Toda combinación posible de precios e ingreso.
Uso	Describe un caso particular.	Permite analizar comparativamente diferentes escenarios.
Ejemplo	Si $p_x = 2$, $p_y = 1$, $M = 60$: $x^* = 15, y^* = 30$	$x = \frac{aM}{p_x}$, $y = \frac{(1-a)M}{p_y}$

Resumen de la clase: ¿Qué aprendimos hoy?

- Las preferencias pueden representarse mediante funciones de utilidad bajo ciertos supuestos.
- Los consumidores enfrentan una restricción presupuestaria: el ingreso es limitado.
- El problema del consumidor es un problema de optimización: se busca maximizar utilidad dado el ingreso.
- Existen dos métodos para encontrar el óptimo del consumidor:
  - Condición de tangencia: $\frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{p_x}{p_y}$
  - Método de Lagrange: maximización con restricción
- A partir del óptimo se obtienen las funciones de demanda individual: $x(p_x, p_y, M)$ y $y(p_x, p_y, M)$

$U(x,y) = \ln(x) + y$ $\quad$ $\text{Max}_{(x,y)} \ \ln(x) + y$ $\quad$ s.a. $2x + y = 10$ $\quad$ Marshaliana maximización

$px = 2 \quad py = 1$ $\quad$ $\mathcal{L} = \ln(x) + y + \lambda(10 - 2x - y)$

$I = 10$

1. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} - 2\lambda = 0 \rightarrow \frac{1}{x} = 2\lambda \rightarrow \frac{1}{2x} = \lambda$

2. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 - \lambda = 0 \rightarrow 1 = \lambda$ $\quad$ $\boxed{1 = \frac{1}{2x}} \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

3. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10 - 2x - y = 0 \rightarrow 10 - 1 - y = 0 \rightarrow y = 9$

Demanda Marshaliana →

$U(x,y) = \ln(x) + y$ $\quad$ s.a. $\quad p_x X + p_y Y = I$ → R.P. $\quad$ $\cancel{px}\left(\frac{py}{\cancel{px}}\right) + py\,Y = I \rightarrow \frac{I - py}{py} = Y = Y^m$ (px, py, I)

$\mathcal{L} = \ln(x) + y + \lambda(I - p_x X - p_y Y)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} - \lambda px = 0 \rightarrow \frac{1}{x\,px} = \lambda$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 - \lambda py = 0 \rightarrow \frac{1}{py} = \lambda$

$\frac{1}{x\,px} = \frac{1}{py} \rightarrow py = x\,px \rightarrow \frac{py}{px} = x = x^m (px, py, I)$