Conceptos de Probabilidades
Sesión 0

Dr. Mauricio Huerta Aguiar

Facultad de Ciencias Sociales y Económicas
Departamento de Economía y Administración
Ingeniería Comercial

UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Outline

Nociones Básicas

Introducción

- Al describir el espacio muestral Ω de un experimento ξ no especificamos que un resultado individual necesariamente tiene que ser un número.
- De hecho, hemos citado varios ejemplos en los cuales el resultado del experimento no fue una cantidad numérica. Por ejemplo,
  - el resultado del lanzamiento de una moneda puede ser **cara** o **sello**,
  - un producto manufacturado en una fabrica puede ser **defectuoso** o **no defectuoso**.
- En muchas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos ω del espacio muestral Ω.

Outline

Variables aleatorias

Una variable aleatoria (VA):

- Mide alguna característica de un experimento aleatorio.
- Es una función definida en Ω y con valores en $\mathbb{R}$ cuyo valor depende del resultado del experimento.

Definición Sea ξ un experimento y Ω el espacio muestral asociado con él. Llamamos VA a una función $X = X(\omega)$ definida en Ω que asigna a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$ un número real $X(\omega)$, es decir,

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

El recorrido de la VA X se define como el conjunto de todos los posibles valores de X y que denotamos por R_X.

Función de distribución acumulativa

La función de distribución acumulativa (FDA) de una VA, denotada por $F_X(\cdot)$, se define como una función con dominio en los reales que satisface

$$F_X(x) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathrm{P}(X \leq x), \quad x \in R_X.$$

- Para todo x real se cumple que $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
- Si $a < b$, entonces $\mathrm{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
- La función $F_X(x)$ es no decreciente en toda la recta real, es decir, dados $a < b$ reales, se cumple $F_X(a) < F_X(b)$.
- Se tiene que $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
- $F_X(x)$ es un función continua por la derecha.

Función de distribución acumulada discreta

La FDA de una VA discreta es la probabilidad de que X sea menor o igual que un valor específico x y está dada por

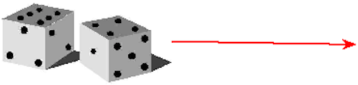
$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i).$$

Algunas propiedades de una FDA discreta (considere un VA discreta con $R_X = \{x_1, x_2, \dots, \}$):

- $\mathrm{P}(X > x_i) = 1 - F_X(x_i)$.
- $\mathrm{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i - 1)$.
- $\mathrm{P}(x_i \leq X \leq x_j) = F_X(x_j) - F_X(x_i - 1)$.

Ejemplo didáctico

Considere el problema del lanzamiento de dos dados y la VA (X) que representa la suma de las caras.



$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1), & (1,2), & \ldots, & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & \ldots, & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6,1), & (6,2), & \ldots, & (6,6) \end{array} \right\}$$

Identifique todo lo expuesto en clases.

Solución

- El experimento aleatorio ξ es lanzar dos dados.
- El espacio Ω está formado por los 36 resultados posibles.
- $X =$ suma de las caras del lanzamiento de dados.
- $R_X = \{2, 3, \ldots, 12\}$.

Resultados de Ω (ω's)						Valor de la VA (x)	Frecuencia de ocurrencia	Probabilidad $\mathrm{P}(X = x)$
(1,1)						2	1	1/36
(1,2)	(2,1)					3	2	2/36
(1,3)	(2,2)	(3,1)				4	3	3/36
(1,4)	(2,3)	(3,2)	(4,1)			5	4	4/36
(1,5)	(2,4)	(3,3)	(4,2)	(5,1)		6	5	5/36
(1,6)	(2,5)	(3,4)	(4,3)	(5,2)	(6,1)	7	6	6/36
(2,6)	(3,5)	(4,4)	(5,3)	(6,2)		8	5	5/36
(3,6)	(4,5)	(5,4)	(6,3)			9	4	4/36
(4,6)	(5,5)	(6,4)				10	3	3/36
(5,6)	(6,5)					11	2	2/36
(6,6)						12	1	1/36

Solución

- La función de probabilidad que describe este experimento está dada por:

$$P(X=x)=\begin{cases} \dfrac{6-\mid 7-x\mid}{36}, & \text{si } x=2,3,\ldots,12 \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- En efecto, $P(X=x)$ es una función de probabilidad, pues cumple con
  - $p_X(x)=P(X=x)=\frac{6-|7-x|}{36}\geq 0\ \forall x\in\{2,3,\ldots,12\}$;
  - $\displaystyle\sum_{x=2}^{12}\frac{6-\mid 7-x\mid}{36}=1.$
- La FDA de X está dada por

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\sum_{i=2}^{x}\frac{6-\mid 7-i\mid}{36}.$$

Definición. Una VA X es continua si su recorrido está en los reales.

Función de densidad de probabilidad (FDP) de una VA continua. La FDP $f_X(x)$ de una VA X cumple con:

- $f_X(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in R_X$ y
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

Función de distribución acumulada continua

La FDA de una VA continua es la probabilidad de que X sea menor o igual que un valor específico x y está dado por

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Algunas propiedades de una FDA continua son:

- $\mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X \leq x)$.
- $\mathrm{P}(X > x) = \mathrm{P}(X \geq x) = 1 - F_X(x)$.
- $\mathrm{P}(X = x) = 0$.
- $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

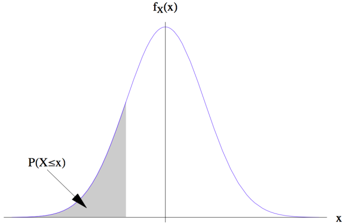
Relación entre FDP y FDA

Como la FDP se define de la forma

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{P}(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x},
\end{aligned}
$$

entonces, desde lo anterior, se tiene que

$$f_X(x)\Delta x \approx \mathrm{P}(x \leq X \leq x + \Delta x).$$



Outline

Esperanza y Varianza

Esperanza

Sea X una VA. Entonces, la esperanza (o media) de X denotada por μ_X o $\mathrm{E}(X)$, se define como

- $$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in R_X} x p_X(x),$$

  si X es una VA discreta con función de cuantía $p_X(x)$.

- $$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

  si X es una VA continua con FDP $f_X(x)$.

¿Cuál es la suma esperada en el lanzamiento de dos dados?

Varianza

Sea X una VA. Entonces, la varianza de X, denotada por σ_X^2 o $\mathrm{Var}(X)$, se define como

- $$\mathrm{Var}(X) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 p_X(x),$$

  si X es una VA discreta con función de cuantía $p_X(x)$.

- $$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx,$$

  si X es una VA continua con FDP $f_X(x)$.

Se define la desviación estándar de X como $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Método abreviado para calcular $\mathrm{Var}(X)$

Considere que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$, es decir,

- $$\mathrm{Var}(X) = \sum_{x \in R_X} x^2 p_X(x) - \mu_X^2,$$

  si X es una VA discreta con función de cuantía $p_X(x)$.

- $$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu_X^2,$$

  si X es una VA continua con FDP $f_X(x)$.

Propiedades de la esperanza y varianza

Sean a y b constantes y X una VA. Entonces,

$$\mathrm{E}(a + bX) = a + b\mathrm{E}(X)$$

y

$$\mathrm{Var}(a + bX) = b^2\mathrm{Var}(X).$$

Note que $\sigma_{a+bX} = |b|\sigma_X$.

Esperanza de una función de una VA

Sea X una VA y $g(\cdot)$ una función cualquiera. Entonces, la esperanza de un función $g(\cdot)$ de X se define como

- $$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x) p_X(x),$$

  si X es una VA discreta con función de cuantía $p_X(x)$.

- $$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx,$$

  si X es una VA continua con PDF $f_X(x)$.

Fin

Gracias por asistir a esta clase