UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Microeconomía

BSC-214 Ingeniería Comercial

Unidad II - Clase 1:

Problema Dual

Erik Muñoz Henríquez

Fechas Importantes

Evaluaciones:

- Control N°2 (15%) – 27/05/2025

Teoría del Consumidor - Primal

Teoría del Consumidor

Esta teoría estudia como un consumidor racional escoge qué bienes consumir. Los conjuntos de decisión en este caso vienen definidos por los precios de cada bien n y la renta (ingreso y/o riqueza)

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^n} u(x)$$
$$s.a$$
$$p \cdot x \leq w$$

Interpretación:

- El consumidor elige un vector de consumo con n bienes
- x_k representa el consumo del bien k
- Cada unidad del bien k cuenta p_k
- El ingreso disponible es w

Teoría del Consumidor

Asumimos que los precios de los bienes k son mayores o iguales a 0. Cada cantidad de k cuesta lo mismo.

- No hay descuentos por unidad
- No hay problemas de stock

El conjunto de resultados posibles del consumidor es:

$$B(p,w) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x \leq w\}$$

El conjunto definido por $p \cdot x = w$ es llamado hiperplano de presupuesto (línea de presupuesto cuando trabajamos en $\mathbb{R}^2_+$

Teoría del Consumidor

Aquel vector de consumo optimo dado $(p, w) \gg 0$ es representado por $x(p, w) \in \mathbb{R}_+^n$ y es conocido como la función de demanda Walrasiana (Walrasian Demand) y/o Demanda Ordinaria la cuál debe cumplir las siguientes propiedades:

- Homogénea de grado 0 en p
- Ley de Walras $x \cdot p = w$ para todo $x \in x(p, w)$
- Convexo

Teoría del Consumidor

La solución del problema del consumidor es llamada la Demanda Marshalliana/Walras y esta definida como:

$$x: \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}_+^n$$

$$x(p,w) = argmax_{x \in B(p,w)} u(x) = \{\mathrm{z} \in B(p,w) : u(z) = max_{x \in B(p,w)} u(x)\}$$

Por lo tanto, el problema del consumidor que hemos planteado anteriormente, lo podemos resolver por la Ley de Walras de la siguiente forma:

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^n} u(x)$$

$$s.a$$

$$p \cdot x = w$$

Obteniendo un consumo optimo

$$x^* = x(p,w)$$

Teoría del Consumidor

Un individuo representativo cuenta con una función de utilidad del tipo

$$u(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

Suponga que el individuo cuenta con un ingreso de w y lo gasta todo en el consumo de dos bienes. El precio de cada producto esta dados por p_x y p_y, para los bienes x e y respectivamente. Por lo tanto, determine:

a) Demanda Marshalliana.

Teoría del Consumidor

Si sustituimos las demandas Marshallianas en la función objetivo $u(x)$ obtenemos la función de utilidad indirecta $v(p, w)$

¿Qué representa la función de utilidad Indirecta $\boldsymbol{v(p, w)}$?

La forma en que hemos trabajado el problema del consumidor, maximizando la utilidad, es solo una opción que es llamada problema "Primal"

Teoría del Consumidor

Un individuo representativo cuenta con una función de utilidad del tipo

$$u(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

Suponga que el individuo cuenta con un ingreso de w y lo gasta todo en el consumo de dos bienes. El precio de cada producto esta dados por p_x y p_y, para los bienes x e y respectivamente. Por lo tanto, determine:

a) Demanda Marshalliana

b) Función de Utilidad Indirecta $v(p_x, p_y, w)$

Teoría del Consumidor

Desde la función de Utilidad Indirecta, podemos rescatar las Demandas Marshallianas, por medio de la **Identidad de Roy**, la cual se define como:

$$x_i(p,w) = -\frac{\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}}$$

Propiedades de la Función de Utilidad Indirecta

- Homogénea de grado 0

$$v(\lambda p, \lambda w) = v(w, p), \forall \, \lambda > 0$$

- Continuidad

Si u es continua, entonces v es continua en

$$\{(p, w): p \gg o, w \geq 0\}$$

- Monotonicidad

$v(w, p)$ es no creciente en p y no decreciente en w

- Cuasi concavidad

Para todo $\bar{v} \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{(p, w): v(p, w) \leq \bar{v}\}$ es convexo para todo $\bar{v}$

Ejercicio – Problema Primal

El consumidor tiene la siguiente función de utilidad:

$$u(x,y) = \left[x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}$$

Suponiendo que los precios de cada bien son (p_x, p_y) y el ingreso del individuo es w
Con esta información, determine:

- Demandas Marshalliana
- Función de Utilidad Indirecta
- Compruebe la Identidad de Roy

Teoría del Consumidor - Dual

Teoría del Consumidor

Hemos visto que el consumidor busca maximizar su utilidad sujeto a una restricción presupuestaria. Pero también, podemos resolver su problema desde otro punto de vista, esto es a través de la minimización del gasto.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n_+} p \cdot x$$

$$\text{s.a.}$$

$$u(x) \geq u$$

Teoría del Consumidor

Del problema de minimización del gasto (PMG) el conjunto de soluciones esta es llamada, Demanda Hicksiana

$$x^* = h(p, u)$$

Posteriormente, al sustituir en la función en la función objetivo, obtenemos la Función de Gastos

$$e(p, u)$$

La función de gastos es el ingreso mínimo requerido para alcanzar un nivel de utilidad cuando el consumidor se enfrenta a precios p

Propiedades Demanda Hicksiana

- Homogénea de grado 0 en p

Para todo $\lambda > 0$ tenemos que $h(\lambda p, \lambda u) = h(p, u)$

- Se alcanza la utilidad sin exceso

Siendo $u(\cdot)$ continua y $p \gg 0$, entonces $u(x) = u$ para todo $x \in h(p, u)$

- Concavidad/unicidad:

Si la preferencias son convexas, entonces $h(p, u)$ es un set convexo. Además, si son estrictamente convexas y se cumple que no hay exceso de utilidad, $h(p, u)$ contiene un solo elemento (único)

Propiedades Función de Gastos

- Homogénea de grado 1 en p

Para todo $\lambda > 0$ tenemos que $e(\lambda p, \lambda u) = \lambda e(p, u)$

- Continuidad

Siendo $u(\cdot)$ continua entonces e es continua en p y u

- Monotonicidad

$e(w, p)$ es no decreciente en p y no decreciente en u

Y se alcanza utilidad sin exceso, entonces $e(p, u)$ es estrictamente creciente en u

- Concavidad en p

e es cóncava en p

Propiedades Función de Gastos

Si la demanda Hicksiana es única, es posible utilizar el **Lema de Shephard**, donde la derivada de la función de gastos con respecto al precio del bien, obtenemos la demanda Hicksiana

$$h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$$

Ejercicio – Problema Dual

Considerando la siguiente función de utilidad Cobb Douglas $u(x) = xy^{\frac{1}{2}}$ Con esto, determine:

- Minimice el gasto sujeto a $u(x, y) = \bar{u}$ y obtenga la demanda Hicksiana
- Obtenga la función de gasto
- Utilizando el Lema de Shephard obtenga las Demandas Hicksianas

Propiedades Función de Gastos

- **Demanda Hicksiana**

Sirve para analizar los efectos de los cambios en los precios sobre las demandas Marshallianas

Específicamente, podemos descomponer en el efecto renta y efecto sustitución

- **La función de gastos es muy importante para el análisis de bienestar**

Ayuda a analizar los efectos del cambio de precios en el bienestar del consumidor

Teoría del Consumidor - Dualidad

Problema Primal y Dual

Dualidad

Condiciones para que exista la dualidad:

- **Preferencias bien comportadas:** Completas, transitivas, convexas y monótonas
- **Función de utilidad continua:** Permite una solución interior
- **Precios y renta positivos:** Permite el sentido económico
- **No saciedad local:** Asegura que el consumidor siempre prefiere una canasta ligeramente mayor.
- **Soluciones interiores:** El consumidor elige cantidades positivas de los bienes.

Identidades de Integrabilidad

1. Dinero = Dinero

$$e\left(p, v(p,w)\right) = w$$

2. Satisfacción = Satisfacción

$$v\left(p, e(p,u)\right) = u$$

3. Bienes = Bienes

$$x_i(p,w) = h_i(p, v(p.w))$$

4. Bienes = Bienes

$$h_i(p,u) = x_i(p, e(p,u))$$

Dualidad

$$x_i(p,w) = -\frac{\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}}$$

Identidad de Roy

Dda. de Factores

Función de Utilidad Indirecta

$$\max_{x_i} u(x) \quad s.a. \quad w = px \longrightarrow x_i^*(w,p) \xrightarrow{\text{Sustituir en } u(x)} v(w,p)$$

$$x_i^*(w,p) = x_i(w, v(w,p))$$

Dda. Cond. de Factores

Función de Costos

$$\min_{x_i} px \quad s.a. \quad u(x) = u \longrightarrow x_i^*(p,u) \xrightarrow{\text{Sustituir en } px} c(p,u)$$

Lema de Shephard

$$h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$$

Ejercicio Dualidad

Un individuo representativo cuenta con una función de utilidad del tipo

$$u(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$

Donde $\alpha + \beta = 1$. Suponga que el individuo cuenta con un ingreso de w y lo gasta todo en el consumo de dos bienes. El precio de cada producto esta dados por p_x y p_y, para los bienes x e y respectivamente. Por lo tanto, determine:

a) Determine las demandas Hicksianas para ambos bienes.
b) Encuentre la función de gastos.
c) Determine las demandas Marshallianas para ambos bienes.
d) Encuentre la función de utilidad indirecta.