UNIVERSIDAD CATOLICA DEL MAULE

Profundización I

Métodos Cuantitativos para la Economía y la Administración

BSC-215 Ingeniería Comercial

Unidad 2 - Clase 2:

Matrices

Erik Muñoz Henríquez

Determinante de una Matriz

Determinante de una Matriz

Podemos definir el determinante de una matriz como:

El determinante de una matriz es un valor que se asocia a una matriz cuadrada (es decir, una matriz con el mismo número de filas y columnas). Este valor proporciona información importante sobre la matriz, como si tiene o no inversa y las propiedades geométricas de las transformaciones lineales que representa.

- Si la matriz es $2x2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(a) = ad - bc$$

- Si la matriz es $3x3$, estudiaremos 3 formas de encontrar el determinante:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & -8 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Determinante de una Matriz – Método de Sarrus

El método de Sarrus es una técnica específica y práctica para calcular el determinante de matrices de $3x3$. Es una forma directa y rápida de obtener el determinante sin recurrir a la expansión por cofactores o a otras técnicas más generales. Para una matriz $3x3$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

1. Primer paso es repetir las dos primeras columnas a la derecha:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a & b & c & | & a & b \\ d & e & f & | & d & e \\ g & h & i & | & g & h \end{bmatrix}$$

Determinante de una Matriz – Método de Sarrus

1. Primer paso es repetir las dos primeras columnas a la derecha:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a & b & c & | & a & b \\ d & e & f & | & d & e \\ g & h & i & | & g & h \end{bmatrix}$$

2. Segundo paso: Calcular la suma de los productos de las diagonales descendentes de izquierda ya derecha

$$Diag\ Descendente = aei + bfg + cdh$$

3. Tercer paso: Calcular la suma de los productos de las diagonales ascendentes de izquierda ya derecha

$$Diag\ Ascendente = ceg + afh + bdi$$

4. Cuarto paso: calcular el determinando como la diferencia entre ambas diagonales

$$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Método de Sarrus - Ejemplo

Calcular del determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Método de Sarrus - Ejemplo

Calcular del determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 225 - 225 = 0$$

Método de Sarrus - Ejemplo

Calcular del determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Método de Sarrus - Ejemplo

Calcular del determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -14 + 48 = 34$$

Determinante de una Matriz – Método por Menores

Para definir el determinante de una matriz usando menores, utilizamos la expansión por cofactores. Este método se basa en la descomposición de la matriz original en matrices más pequeñas (submatrices) y el uso de sus determinantes para calcular el determinante de la matriz original

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

1. El primer paso es identificar el cofactor correspondiente al al elemento a_{ij}, lo denotamos por c_{ij} y está dado por

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Determinante de una Matriz – Método por Menores

Supongamos la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. El primer paso selección una fila o columna de preferencia, generalmente se recomienda elegir aquella fila/columna que contenga algún cero.

- Ejemplo: Elegimos la primera fila, entonces debemos determinar los menores y el cofactor:

Determinante de una Matriz – Método por Menores

Supongamos la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

$$\mathrm{Det}(A) = 2(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 3(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = 2(12) - 3(30) - (-6) = -60.$$

Método por Menores – Ejemplo:

Supongamos la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Método por Menores – Ejemplo:

Supongamos la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 32$$

Método por Menores – Ejemplo:

Supongamos la siguiente matriz

$$B = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Método por Menores – Ejemplo:

Supongamos la siguiente matriz

$$B = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -10 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

Determinante de una Matriz – Método Elementos Fila

El método de propiedades de elementos de fila, también conocido como el método de eliminación gaussiana o reducción de filas, es un proceso para calcular el determinante de una matriz y también se usa para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este método se basa en transformar la matriz original en una matriz triangular superior utilizando operaciones elementales de fila, y luego calcular el determinante a partir de esta matriz triangular.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

1. El primer paso es transformar la matriz en una matriz triangular superior
2. Calcular el determinante, cuyo resultado es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Método Elementos Fila – Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Multiplicar la primera fila por $\frac{1}{2}$ y restar la fila 2 (Hacer cero el elemento a_{21})
2. Multiplicar la primera fila por $\frac{3}{2}$ y restar la tercera fila (Hacer cero el elemento a_{31})
3. Multiplicar por 5 la segunda fila y restar la fila 3 (Hacer cero el elemento a_{32})

Método Elementos Fila – Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Multiplicar la primera fila por $\frac{1}{2}$ y restar la fila 2 (Hacer cero el elemento a_{21})

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Método Elementos Fila – Ejemplo:

2. Multiplicar la primera fila por $\frac{3}{2}$ y restar la tercera fila (Hacer cero el elemento a_{31})

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

3. Multiplicar por 5 la segunda fila y restar la fila 3 (Hacer cero el elemento a_{32})

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Determinante:

$$\det(A) = 2 * \frac{1}{2} * (0) = 0$$

Método Elementos Fila – Ejemplo:

Calcule el determinante de:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Método Elementos Fila – Ejemplo:

Calcule el determinante de:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 84$$

Método Elementos Fila – Ejemplo:

Calcule el determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \\ -6 & 7 & 19 \\ 9 & 15 & 21 \end{bmatrix}$$

Método Elementos Fila – Ejemplo:

Calcule el determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \\ -6 & 7 & 19 \\ 9 & 15 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 14 \\ -6 & 7 & 19 \\ 9 & 15 & 21 \end{vmatrix} = 0$$

Método Elementos Fila – Ejemplo:

Calcule el determinante de:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método Elementos Fila – Ejemplo:

Calcule el determinante de:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -162$$

Matriz Inversa

Matriz Inversa

Sea la matriz $A_{n\times n}$, decimos que la matriz $B_{n\times n}$ es la inversa de $A_{n\times n}$ si

$$A_{n\times n}B_{n\times n} = B_{n\times n}A_{n\times n} = I_{n\times n}$$

En caso de que la inversa de $\boldsymbol{A}$ exista la denotaremos por A^{-1}.

- A^{-1} existe si y solamente si $\det(A) \neq 0$.
- En el caso particular $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, la fórmula, dada arriba, para el cálculo de la inversa se convierte en:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Matriz Inversa

Recordemos que los cofactores de una matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ se definen como:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \text{ ,}$$

donde M_{ij} es el menor correspondiente a la entrada a_{ij} .

Definimos **la matriz de cofactores** (la cual denotamos por $cof(A)$) como aquella matriz cuyas entradas son los cofactores de la matriz A, es decir:

$$cof(A) = [c_{ij}]_{n\times n.}$$

Luego definimos **la matriz adjunta** de A como la transpuesta de la matriz de cofactores y la denotamos por $Adj(A)$. Es decir:

$$Adj(A) = [cof(A)]^T$$

Finalmente definimos la **matriz inversa** de A como:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A).$$

Matriz Inversa – Ejemplo

Calcule la inversa de la matriz de:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa – Ejemplo

Calcule la inversa de la matriz de:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa – Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a) Determine las matrices $Cof(A), Adj(A)$.

b) Usando a) halle la inversa de A

c) Encuentre el producto. $A * Adj(A)$

Matriz Inversa – Ejemplo

a) Determine las matrices $Cof(A), Adj(A)$.

$$cof(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 5\end{bmatrix} & (-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 5\end{bmatrix} & (-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 3\end{bmatrix} \\ (-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 5\end{bmatrix} & (-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix} & (-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 3\end{bmatrix} \\ (-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} & (-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix} & (-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\rightarrow Adj(A) = [cof(A)]^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matriz Inversa – Ejemplo

a) Usando a) halle la inversa de A.

$$\det(A) = 3 \to A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre el producto. $A.Adj(A)$

$$A\big(Adj(A)\big) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

Matriz Inversa – Ejemplo

Usted es contratado como economista *chief* de un organismo internacional. Con la finalidad de hallar la elasticidad pobreza de 3 economías de América Latina para el período 1998-2018. La fórmula de elasticidad puede ser interpretada por: $E = AB^{-1}$. La matriz A expresa la evolución promedio de la pobreza (un signo negativo indica que la pobreza cayó; mientras que uno positiva que aumentó). La matriz B expresa el crecimiento económico promedio de las últimas tres décadas. La matriz B^{-1} puede interpretarse como la inversa de la matriz B

$$A = \begin{array}{cccc} & 1988-1998 & 1998-2008 & 2008-2018 \\ Bolivia & -5\% & -8\% & -12\% \\ Perú & 5\% & -12\% & -18\% \\ Venezuela & -3\% & 8\% & 15\% \end{array}$$

$$B = \begin{array}{cccc} & 1988-1998 & 1998-2008 & 2008-2018 \\ Bolivia & 8 & 7 & 4 \\ Perú & 2 & 8 & 5 \\ Venezuela & 6 & -5 & -25 \end{array}$$

a. Halle la inversa de la matriz B, es decir B^{-1}

b. Hallar la elasticidad crecimiento-pobreza ¿Qué economía ha presentado una mayor elasticidad crecimiento-pobreza dentro del periodo 1998-2018?

Matriz Inversa – Ejemplo

a. Halle la inversa de la matriz B, es decir B^{-1}

$$B^{-1} = \frac{1}{-1072}\begin{bmatrix} -175 & 155 & 3 \\ 80 & -224 & -32 \\ -58 & 82 & 50 \end{bmatrix}$$

b. Hallar la elasticidad crecimiento-pobreza ¿Qué economía ha presentado una mayor elasticidad crecimiento-pobreza dentro del periodo 1998-2018?

$$E = AB^{-1} = \begin{bmatrix} -5\% & -8\% & -12\% \\ 5\% & -12\% & -18\% \\ -3\% & 8\% & 15\% \end{bmatrix}\left(\frac{1}{-1072}\begin{bmatrix} -175 & 155 & 3 \\ 80 & -224 & -32 \\ -58 & 82 & 50 \end{bmatrix}\right)$$

$$E = \begin{bmatrix} -0.87\% & & \\ & -1.9\% & \\ & & -0.5\% \end{bmatrix}.$$

Durante las últimas 3 décadas, ante un aumento de 1% del PBI, la pobreza en Perú disminuyó en 1.9%.