



Profundización I

Métodos Cuantitativos para la Economía y la Administración

BSC-215 Ingeniería Comercial

Unidad 2 - Clase 1:

Matrices

Erik Muñoz Henríquez

Unidad II: Matrices

En esta unidad aprenderemos a **aplicar operaciones matriciales para la resolución de problemas asociados a la ciencias sociales y económicas**

Durante este periodo revisaremos:

- Definiciones de Matrices.
- Aritmetica de Matrices.
- Inversa.

Para esta unidad pueden reforzar los contenidos consultando el siguiente libro:

- Haeussler Ernest, F. & Paul Jr. Richard, S. (2008), Matemáticas para la Administración, Economía. Pearson. México. **Capitulo N°6**

Evaluaciones

Unidad II: Matrices

- Taller (5%) – 26/05/2025
- Prueba N°2 (30%) - 02/06/2025



¿Qué es una Matriz?



Matrices

Podemos definir una matriz como:

Una estructura matemática compuesta por filas y columnas de elementos dispuestos en forma rectangular. Cada elemento de la matriz puede ser un número, una variable o incluso otra matriz. Las matrices se utilizan ampliamente en diversos campos, como álgebra lineal, geometría, informática, física y economía, entre otros. Son especialmente útiles para representar y manipular conjuntos de datos de manera ordenada y eficiente.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & -8 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Matrices

Los elementos de las líneas horizontales conforman las **filas**, mientras que los elementos de las líneas verticales conforman las **columnas**.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & -8 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

- El orden (la dimensión) de una matriz es: $\left(\begin{array}{l} \text{número total} \\ \text{de filas} \end{array} \times \begin{array}{l} \text{número total} \\ \text{de columnas} \end{array} \right)$.

El orden de A = 2 × 3 y el orden de B = 4 × 3

Matrices

Notación genérica (o general): $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, donde:

$$\begin{cases} m = \text{número total de filas} \\ n = \text{número total de columnas} \end{cases}$$

a_{ij} = elemento (o entrada) de la matriz ubicado en la fila i y la columna j

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Matrices

Sea la matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$, tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}(2i + j)$. Calcule de manera explícita la matriz A . Pista: $a_{11} = (-1)^{1+1}(2(1) + 1) = 3$

Debemos completar:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2}(2(1) + 2) = -4$$

Ejemplo: Matrices

Sea la matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$, tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}(2i + j)$. Calcule de manera explícita la matriz A .

Pista: $a_{11} = (-1)^{1+1}(2(1) + 1) = 3$

$$a_{11} = (-1)^{1+1}(2(1) + 1) = 3 \quad a_{12} = (-1)^{1+2}(2(1) + 2) = -4$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1}(2(2) + 1) = -5 \quad a_{22} = (-1)^{2+2}(2(2) + 2) = 6$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1}(2(3) + 1) = 7 \quad a_{32} = (-1)^{3+2}(2(3) + 2) = -8$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Matrices

Sea la matriz $C = [c_{ij}]_{4 \times 4}$ tal que $c_{ij} = \begin{cases} 9i^2 + j^2, & i \leq j \\ (3i + j)^2, & i > j \end{cases}$

Debemos completar:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = 9(1)^2 + (2)^2 = 9 + 4 = 13$$

Ejemplo: Matrices

Sea la matriz $C = [c_{ij}]_{4 \times 4}$ tal que $c_{ij} = \begin{cases} 9i^2 + j^2, & i \leq j \\ (3i + j)^2, & i > j \end{cases}$

Debemos completar:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 13 & 18 & 25 \\ 49 & 40 & 45 & 52 \\ 100 & 121 & 90 & 97 \\ 169 & 196 & 225 & 160 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Matrices

Sea la matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 3i - j, & i < j \\ i^2 - 2j, & i = j \\ i - j, & i > j \end{cases}$. Calcule de manera explícita la

matriz A . Debemos completar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Matrices

Sea la matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 3i - j, & i < j \\ i^2 - 2j, & i = j \\ i - j, & i > j \end{cases}$. Calcule de manera explícita la

matriz A . Debemos completar:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

The title is framed by two horizontal bars. The top bar is dark blue on the left and light blue on the right. The bottom bar is also dark blue on the left and light blue on the right.

Matrices Especiales

Ejemplo: Matrices

- **Matriz cero:** es aquella matriz de orden $m \times n$ cuyas entradas son todas ceros.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz cuadrada:** es aquella matriz cuyo número total de filas es igual al número total de columnas.

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Matrices

- **Matriz identidad:** es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son todos igual al número 1, mientras que los demás elementos son ceros.

$$I_3 = \text{identidad de orden } 3 \times 3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz triangular superior,** es una matriz cuadrada cuyas entradas por debajo de la diagonal principal son todas ceros.

$$A = \begin{bmatrix} -500 & 19 & 0 & -239 \\ 0 & -6 & -7 & 88 \\ 0 & 0 & -43 & 145 \\ 0 & 0 & 0 & 321 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo: Matrices

- **Matriz Fila:** o tambien llamada **vector fila** es aquella matriz que tiene orden $1 \times n$.

$$F = [-34 \quad 12 \quad 900 \quad 441 \quad -657]$$

- **Matriz Columna:** o tambien llamada **vector columna** es aquella matriz que tiene orden $m \times 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 239 \\ 88 \\ 145 \\ 321 \end{bmatrix}.$$

The title is framed by two horizontal bars. The top bar is dark blue on the left and light blue on the right. The bottom bar is also dark blue on the left and light blue on the right.

Operación de Matrices

Igualdad de Matrices

Sean las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Diremos que las matrices A y B son iguales si:

- Poseen el mismo orden.
- $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i , para todo j .

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 87 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 87 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow A \neq B$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 87 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 87 \end{bmatrix} \rightarrow A = B$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 87 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 19 \\ 6 & 87 \end{bmatrix} \rightarrow A \neq B$$

Ejemplo: Igualdad de Matrices

Si $A = B$ calcule x, y, z, a, b y c

$$A = \begin{bmatrix} 3x - y & 5x - 2z & \frac{3z}{2} \\ 2 & \frac{4b}{5} & 5a + c \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -\frac{1}{4} \\ 2a - b & 5 - b & \frac{100}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x - y & 5x - 2z & \frac{3z}{2} \\ 2 & \frac{4b}{5} & 5a + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -\frac{1}{4} \\ 2a - b & 5 - b & \frac{100}{9} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Igualdad de Matrices

$$3x - y = 2 \dots (1) \quad 5x - 2z = 5 \dots (2) \quad \frac{3z}{2} = -\frac{1}{4} \dots (3)$$

$$2 = 2a - b \dots (4) \quad \frac{4b}{5} = 5 - b \dots (5) \quad 5a + c = \frac{100}{9} \dots (6)$$

- De la ecuación (3) tenemos: $z = -\frac{1}{6}$. Luego reemplazamos en la ecuación (2): $5x - 2\left(-\frac{1}{6}\right) = 5 \rightarrow x = \frac{14}{15}$
- Luego reemplazamos en la ecuación (1): $3\left(\frac{14}{15}\right) - y = 2 \rightarrow y = \frac{4}{5}$.
- De la ecuación (5) tenemos: $4b = 25 - 5b \rightarrow b = \frac{25}{9}$. Luego reemplazamos en la ecuación (4): $2 = 2a - \frac{25}{9} \rightarrow a = \frac{43}{18}$
- Luego reemplazamos en la ecuación (6): $5\left(\frac{43}{18}\right) + c = \frac{100}{9} \rightarrow c = -\frac{5}{6}$.

Suma de Matrices

Sean las matrices $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, definimos $A + B$ ($A - B$) como aquella matriz cuyas entradas son las sumas (restas) de las correspondientes entradas de las matrices A y B , esto es:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$
$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}.$$

Ejemplo:

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Calcule $(A + B)$

Suma de Matrices

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & 6+2 & 1+8 & 2+4 \\ 0+2 & 1+3 & 3+3 & 5+2 \\ 2+4 & 7+0 & 9+2 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 7 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

Producto de un Número por una Matriz

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, definimos la matriz $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}$.

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ cuanto será $-5A$

$$-5A = \begin{bmatrix} -25 & -5 & -5 & -35 \\ 0 & 15 & -35 & -15 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{bmatrix}$$

Producto de Matrices

Sean las matrices A y B , para poder obtener el producto AB debemos exigir las siguientes condiciones sobre las dimensiones de las matrices, esto es:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$
$$B = [b_{ij}]_{n \times p}$$

- La dimensión del producto AB está dada por $m \times p$.
- Es importante el orden en que se escriben las matrices. Por ejemplo, si $A_{2 \times 3}$ y $B_{3 \times 4}$ entonces el producto AB existe, pero el producto BA no existe.

Ejemplo: Producto de Matrices

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcule AB
- ¿Es posible calcular BA ?, si así fuera calcúlelo.

Ejemplo: Producto de Matrices

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule AB

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(2) + (-6)(1) & 2(0) + (-1)(4) + (-6)(1) \\ 1(-3) + (3)(2) + (2)(1) & 1(0) + 3(4) + 2(1) \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Producto de Matrices

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcule AB
- ¿Es posible calcular BA ?, si así fuera calcúlelo.

$$BA = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 18 \\ 8 & 10 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Producto de Matrices

Para el par de matrices dadas, encuentre los productos AB y BA , si es posible.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Producto de Matrices

Para el par de matrices dadas, encuentre los productos AB y BA , si es posible.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & -4 \\ 8 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 5 & -2 & 11 \\ -4 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una Matriz

La transpuesta de A la denotamos A^T y se obtiene de A considerando:

- La 1ª fila de A como la 1ª columna de A^T .
- La 2ª fila de A como la 2ª columna de A^T y así sucesivamente.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 8 \\ 7 & 4 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Transpuesta de una Matriz

Propiedades:

- $(A^T)^T = A$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & -4 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow (A^T)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & -4 & 12 \end{bmatrix} = A$$

- $(A + B)^T = A^T + B^T$

- $(\alpha A)^T = \alpha(A^T), \alpha \in \mathbb{R}.$

- $(AB)^T = B^T A^T$

Transpuesta de una Matriz

Comprobemos esta ultima propiedad:

- $(AB)^T = B^T A^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -30 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow (AB)^T = \begin{bmatrix} -2 & 15 \\ -30 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 15 \\ -30 & -5 \end{bmatrix}.$$

Matriz Simétrica

Una matriz A se dice que es **simétrica** si $A^T = A$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & -8 \\ -3 & -8 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow A^T =$$

Ejemplo: Matriz Simétrica

Si A es una matriz simétrica, hallar A^2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a - b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b - c & a - c & 4 \end{bmatrix}$$

- Primero debemos encontrar los valores de las incógnitas y luego multiplicar.
- Utilizar la propiedad de la simetría

Ejemplo: Matriz Simétrica

Si A es una matriz simétrica, hallar A^2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a - b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b - c & a - c & 4 \end{bmatrix}$$

Como A es simétrica entonces:

$$A^T = A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & b - c \\ a - b & 3 & a - c \\ -1 & b & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a - b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b - c & a - c & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow a - b = 2, \quad b - c = -1, \quad b = a - c \rightarrow a = 3, \quad b = 1, \quad c = 2.$$