

# Pauta Taller 1

## Unidad 1

**Nota.** En el problema 1 se interpreta “Def” como *cálculo de la derivada por definición*, es decir, usando el límite del cociente incremental.

### 1. Derivar por definición $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Queremos calcular

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Como

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1},$$

entonces

$$f(x+h) = \sqrt{(x+h)^2 + 1}.$$

Sustituyendo en la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{h}.$$

Para eliminar la raíz del numerador, racionalizamos multiplicando por el conjugado:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Entonces:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^2 + 1) - (x^2 + 1)}{h (\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})}.$$

Desarrollamos el numerador:

$$(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1) = x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1 = 2xh + h^2.$$

Así,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h (\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})}.$$

Factorizamos  $h$  en el numerador:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h (\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})}.$$

Cancelamos  $h$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + h}{\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ahora evaluamos el límite:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}$$

## 2. Derivar $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

Usamos la regla del cociente:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Tomamos

$$u = e^x \quad \text{y} \quad v = x^2 + 1.$$

Entonces:

$$u' = e^x, \quad v' = 2x.$$

Aplicando la regla:

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x(2x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Factorizamos  $e^x$ :

$$f'(x) = \frac{e^x((x^2 + 1) - 2x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Simplificamos el paréntesis:

$$x^2 + 1 - 2x = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}}$$

### 3. Máximos y mínimos relativos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Primero calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

Factorizamos:

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1).$$

Los puntos críticos se obtienen resolviendo  $f'(x) = 0$ :

$$3(x - 3)(x + 1) = 0.$$

Entonces:

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -1.$$

Ahora calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x - 6.$$

#### Clasificación con la segunda derivada

**En  $x = -1$ :**

$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0.$$

Como la segunda derivada es negativa, en  $x = -1$  hay un **máximo relativo**.

Calculamos la ordenada:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10.$$

Por tanto, el máximo relativo es 10 y se encuentra para  $x = -1$ .

**En  $x = 3$ :**

$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0.$$

Como la segunda derivada es positiva, en  $x = 3$  hay un **mínimo relativo**.

Calculamos la ordenada:

$$f(3) = 3^3 - 3(3^2) - 9(3) + 5 = 27 - 27 - 27 + 5 = -22.$$

Por tanto, el mínimo relativo es -22 y se encuentra en  $x = 3$ .

**4. Resolver**  $\int \frac{4x^3 + 8x}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} dx$

Usamos sustitución.

Sea

$$u = x^4 + 4x^2 + 7.$$

Entonces:

$$du = (4x^3 + 8x) dx.$$

Esto implica que

$$dx = \frac{du}{4x^3 + 8x}$$

La integral queda:

$$\int \frac{4x^3 + 8x}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int u^{-1/2} du.$$

Integramos:

$$\int u^{-1/2} du = \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = 2u^{1/2} + C.$$

Volviendo a la variable  $x$ :

$$\boxed{\int \frac{4x^3 + 8x}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} dx = 2\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7} + C}$$

**5. Resolver**  $\int x^2 e^{2x} dx$

Usamos integración por partes dos veces.

Recordemos:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

### Primera integración por partes

Tomamos

$$u = x^2 \quad \text{y} \quad dv = e^{2x} dx.$$

Entonces:

$$du = 2x dx, \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Aplicamos la fórmula:

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \left( \frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int \left( \frac{1}{2} e^{2x} \right) (2x) dx.$$

Simplificando:

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx.$$

Ahora debemos resolver

$$\int x e^{2x} dx.$$

## Segunda integración por partes

Tomamos ahora

$$u = x \quad y \quad dv = e^{2x} dx.$$

Entonces:

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Aplicando integración por partes:

$$\int x e^{2x} dx = x \left( \frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx.$$

Esto es:

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx.$$

Y como

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x},$$

resulta:

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}.$$

## Sustitución final

Volvemos a la expresión anterior:

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left( \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right) + C.$$

Distribuyendo el signo menos:

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

Factorizamos  $e^{2x}$ :

$$\int x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) + C.$$

También puede escribirse como:

$$\boxed{\int x^2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 1) + C}$$

## 6. Resolver $\int_0^1 2(x+1)e^{x^2+2x} dx$

Usamos sustitución.

Sea

$$u = x^2 + 2x.$$

Entonces:

$$du = (2x + 2) dx = 2(x + 1) dx.$$

La integral queda:

$$\int 2(x+1)e^{x^2+2x} dx \Big|_{x=0}^{x=1} = \int e^u du \Big|_{x=0}^{x=1}$$

Integramos:

$$\int e^u du \Big|_{x=0}^{x=1} = e^u \Big|_{x=0}^{x=1} = e^{x^2+2x} \Big|_{x=0}^{x=1} = e^{1^2+2(1)} - e^{0^2+2(0)} = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

Por tanto,

$$\boxed{\int_0^1 2(x+1)e^{x^2+2x} dx = e^3 - 1}$$